XXVIII Ставропольская краевая открытая научная конференция школьников

Секция: математика

Название работы: «Производная и ее практическое применение»

Автор работы: Гончаров Александр Александрович

Место выполнения работы: ст. Григорополисская

МОУ СОШ №2, 11 класс.

Научный руководитель: Кузнецова Елена Ивановна,

учитель математики МОУ СОШ № 2

Ставрополь, 2017

Содержание

I.Введение.

Как и у всех учеников, у меня возник вопрос: нужна ли производная для будущей профессии?

Производная функции играет важную роль в естественно-научных и инженерно-технических исследованиях. Для многих отраслей науки она стала важным орудием количественного расчета, методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Решил подробнее изучить материал по данному вопросу. Оказалось, что на уроках мы узнали очень мало, а вопрос очень обширный. Самостоятельно и дополнительно решил изучить основы дифференциального исчисления, которые способствуют осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в различных областях. В ходе работы я пытаюсь доказать поставленную гипотезу.

Объект исследования: область математики – дифференцирование.

Цель работы:

1. Расширить область математических знаний.
2. Развивать логическое мышление.
3. Вывести общие формулы, позволяющие решать задачи дифференцирования.
4. Показать, что производная широко применяется при решении задач из различных областей жизнедеятельности.

Задачи исследования:

- собрать, изучить и систематизировать материал о производной;
- рассмотреть, как производная используется при решении практических задач;
- использование производной в различных сферах жизнедеятельности.

II. История производной.

Задачи, решение которых привело к понятию производной функции, ставились с давних пор. Здесь выделяются два круга, казалось бы, совершенно не связанных между собой задач. Первый – нахождение наибольших и наименьших значений, или как сейчас говорят, экстремумов различных величин. Второй – проведение касательных к кривым и вычисление скорости. Задачи на экстремум постоянно возникали в практической деятельности, поскольку люди всегда интересовались вопросами: Что больше? Кто быстрее? Что длиннее?

Только в 17 веке было обнаружено, что все эти задачи можно решить единым методом, используя бесконечно малые величины. Развитие этого метода в трудах Ньютона и

Лейбница привело к созданию математического анализа, появление которого широко раздвинуло границы применения математики.

В 1638 году Пьер Ферма, используя алгебраические методы, сформулировал необходимое условие существования в точке экстремума. На современном языке оно звучит так: если производная в точке равна нулю или не существует, то в этой точке функция имеет экстремум.

Честь открытия основных законов математического анализа наравне с Ньютоном принадлежит немецкому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу.

В 1683 году Лейбниц печатает статью «Новый метод максимумов и минимумов», в которой содержится достаточный признак экстремума функции: если в точке X первая производная функции равна нулю, а вторая отлична от нуля, то X – точка экстремума функции, причем, если вторая производная в этой точке положительна, то X – точка минимума; если отрицательна, то X – точка максимума.

III. **Понятие производной**

Производной функции $y — f(x)$ **называется предел отношения** $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ **при стремлении** x_1 **к x.**

Исторически сложилась символика для обозначения участвующих в этом определении выражений. Разность значений аргумента обозначают Δx (дельта икс) и называют *приращением аргумента,* а разность значений функций обозначают Δ*y* и называют *приращением функции.*

Иначе говоря, $x_1 – x=\Delta x$, а $f(x+\Delta x)-f(x)= \Delta y$.

Средняя скорость изменения функции записывается как $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Стягивание отрезка в точку означает стремление Δx к нулю. Производную функции *y=f(x)* обозначают с помощью штриха: *y'* или f '. Получается новый вариант определения производной:

Производной **функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю**.

Символически определение производной можно записать так:

или $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ *при* $\Delta x \to 0$

IV. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Понятие производной возникло как математическое описание скорости движения. Поэтому важнейшим приложением производной является вычисление скорости. Скорость произвольно движущейся точки является векторной величиной, так как она определяется с помощью вектора — перемещения точки за промежуток времени. Рассмотрим сначала простейший случай: движение точки по прямой. При прямолинейном движении точки ее положение, перемещение, скорость, ускорение и другие характеристики, которые имеют векторный смысл, можно задать одним числом, т. е, считать скалярными величинами.

Составим таблицу перевода понятий механики на язык математики, применяя более привычные для физики обозначения. Ускорение произвольного движения определяется как скорость изменения скорости, т. е. как производная скорости по времени: $a = v'$. Так как скорость производная координаты, а ускорение есть производная скорости, то ускорение называют второй производной координаты и обозначают: $a = x''$.

Через координату точки $x = x(t)$ и ее производные можно выразить другие механические величины: сила $F = ma = mx''$, где m – масса, импульс $P = mv = mx'$, кинетическая энергия $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2}$

1. *Производная в физике*

Основой разнообразных физических приложений производной является понятие дифференциала.

Дифференциалом функции называют произведение ее производной на приращение аргумента.

$dy = f'(x)\Delta x$ ***или*** $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Для вычисления дифференциала в физике достаточно знать , что дифференциал – это главная часть приращения функции, линейно зависящая от приращения аргумента. Тогда, в равенстве

$dy = kdx$ имеется ввиду, что k – это производная y по x.

1) *Работа.*

Рассмотрим работу, которую совершает заданная сила F при перемещении по отрезку

оси x. Если сила F постоянна, то работа A равна произведению F на длину пути. Если сила меняется, то ее можно рассматривать как функцию от x, т. е. $F = F(x)$. Приращение работы на отрезке $[x;\ x + \Delta x]$ нельзя точно вычислить как произведение $F(x)dx$, так как сила меняется на этом отрезке. Однако при маленьких dx можно считать, что сила меняется незначительно и произведение представляет собой главную часть , т. е. является дифференциалом работы: dA = F(x)dx. Таким образом, силу можно считать производной работы по перемещению.

2) *Заряд.*

Пусть q – заряд, переносимый электрическим током через поперечное сечение проводника за время t. Если сила тока I постоянна, то за время dt ток перенесет заряд, равный Idt.

При силе тока, изменяющейся со временем по некоторому закону I = I(t) произведение I(t)dt дает главную часть приращения заряда на маленьком отрезке времени [t; t + Δt], т. е. является дифференциалом заряда: dq = I(t)dt. Снова получаем, что сила тока является производной заряда по времени.

3) *Масса тонкого стержня.*

Пусть есть неоднородный тонкий стержень. Если ввести координаты так, как показано на рисунке 4., то можно рассмотреть функцию m = m(l) – массу куска стержня от точки O до точки l.

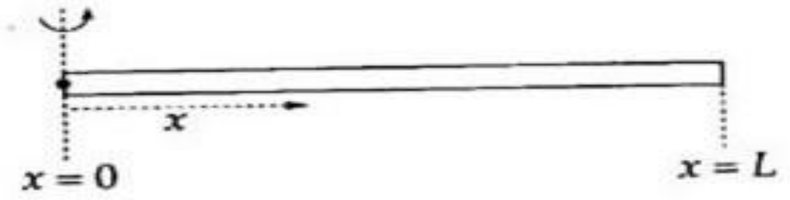

рис. 4

Неоднородность стержня означает, что его линейная плотность не является постоянной, а зависит от положения точки l по некоторому закону $\rho = \rho(l)$. Если на маленьком отрезке стержня [l; l + dl] мы будем считать плотность постоянной и равной $\rho(l)$, то произведение $\rho(l)dl$ дает нам дифференциал массы – dm. Это значит, что линейная плотность – это производная массы по длине.

4) *Теплота.*

Рассмотрим процесс нагревания какого-либо вещества и будем вычислять количество теплоты Q(T), которое необходимо, чтобы нагреть 1 кг этого вещества от 0° до T° (по Цельсию). Зависимость Q = Q(T) очень сложна и определяется из опыта. Если бы удельная теплоемкость c данного вещества не зависела от температуры , то произведение cdT дало бы нам изменение количества теплоты. Считая на малом отрезке [T; T + dT] удельную теплоемкость постоянной, мы получим дифференциал теплоты dQ как c(T)dT. Поэтому теплоемкость – это производная теплоты по температуре.

5) *Работа как функция времени.*

Нам известна характеристика работы, определяющая ее скорость по времени, - это мощность. При работе с постоянной мощностью N работа за время dt равна Ndt. Это выражение представляет собой дифференциал работы, т. е. dA = N(t)dt и мощность выступает как производная работы по времени.

2. *Задачи на максимум и минимум*

Большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, оптимального решения поставленной задачи. Как, располагая определенными ресурсами, добиться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени – так ставят вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества. Не все такие задачи поддаются точному математическому описанию, не для всех из них найдены короткие пути решения. Однако часть таких задач поддается исследованию с помощью методов математического анализа – это задачи, которые можно свести к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции.

Наиболее важной для приложений ситуацией является следующая: функция f задана на отрезке [a;b] и имеет производную во всех точках этого отрезка. Тогда для нахождения наибольшего и наименьшего значений этой функции надо поступить так:

Найти критические точки (в данном случае корни производной), вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, из найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

3. *Применение производной в химии и биологии*

Производная характеризует в биологии – скорость размножения колонии микроорганизмов, в химии – скорость химической реакции.

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов ***y*** и временем ***t*** её размножения задана уравнением: ***y = x(t).***

Пусть Δt - промежуток времени от некоторого начального значения ***t*** до $t+\Delta t$. Тогда $y + \Delta y = x(t+\Delta t)$- новое значение численности популяции, соответствующее моменту $t+\Delta t$, а $\Delta y + x(t + \Delta t) - x(t)$ - изменение числа особей организмов. Отношение является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью жизнедеятельности популяции. Вычисляя , получаем ***y´ = P(t) = x´ (t)***, или производительность жизнедеятельности популяции в момент времени ***t***.

Пусть дана функция p=p(t),где p-количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию в момент времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δp величины p. Отношение Δp/Δt- есть средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении tΔ к нулю - есть скорость химической реакции в данный момент времени . v(t) = p´(t)

Скорость химической реакции – один из решающих факторов, который нужно учитывать во многих областях научно-производственной деятельности. Например, инженерам-технологам при определении эффективности химических производств, химикам, разрабатывающим препараты для медицины и сельского хозяйства, а также врачам и агрономам, использующим эти препараты для лечения людей и для внесения их в почву. Одни реакции проходят практически мгновенно, другие идут очень медленно. В реальной жизни для решения производственных задач, в медицинской, сельскохозяйственной и химической промышленности важно знать скорости реакций химических веществ.

4. *Применение производной в экономике*

Производная является мощным средством решения прикладных задач. С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей:

- Инженеры технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции;
- Конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;
- Экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными.

Пусть функция V = V(t) выражает количество произведенной продукции V за время t. Найдем производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до to+Δt количество произведенной продукции изменится от значения Vo=V(to) до значения Vo+ΔV = V(to+Δt); тогда средняя производительность труда за этот период времени Пср.= $\frac{\Delta V}{\Delta t}$. Очевидно, что производительность труда в момент to можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до

$t_0+\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е. $П(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Таким образом, экономический смысл производной заключается в том, что производная объема произведенной продукции по времени $V'(t)$ есть производительность труда в момент

t_0: $П(t) = V'(t)$

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной. Издержки производства **y** будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции **x** . Пусть Δ **x** - прирост продукции, тогда Δ **y** – приращение издержек производства и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции: $J(x) = y'(x)$.

5. *Производная в электротехнике*

Двадцатый век называют по-разному. И ядерным веком, и ракетным, и космическим. Но самым точным было и остается название: век электричества. Доказывать это не нужно. Достаточно посмотреть вокруг. В наших домах, на транспорте, на заводах : всюду работает электрический ток. В цепи электрического тока электрический заряд меняется с течением времени по закону $q=q(t)$. Сила тока I есть производная заряда q по времени $I = q'(t)$.

6. *Производная в географии.*

Идея социологической модели Томаса Мальтуса состоит в том, что прирост населения пропорционально числу населения в данный момент времени t через N(t), $N'(t) = N(t)$. Модель Мальтуса неплохо действовала для описания численности населения США с 1790 по 1860 годы. Ныне эта модель в большинстве стран не действует.

Выведем формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени t.

Пусть $y = y(t)$- численность населения.Рассмотрим прирост населения за $\Delta t = t-t_0$

$\Delta y = k\, y\, \Delta t$, где $к = к_р – к_с$ –коэффициент прироста ($к_р$ – коэффициент рождаемости, $к_с$ – коэффициент смертности)

$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k\,y$ При $\Delta t \to 0$ получим $y' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ $y' = к\,y$

V**. Заключение**

Этой работой я хотел показать на примерах применение производной. Надеюсь, что тема раскрыта полностью и у меня нет более сомнений о полезности производной.

Данная работа помогла сформировать видение целостной картины информационного мира, способствовала развитию воображения, творческих способностей, побудила к самостоятельной исследовательской деятельности, расширила круг интересов, увлекла, помогла формировать умение делать параллели и выводы. Итогом этой работы стало то, что теперь я могу применять полученные знания на других уроках. А уроки математики перестали быть скучными и неинтересными.

Библиография

1. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк./ Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. - М.: Просвещение, 1993.

2. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1992.

3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Уч. пособие. - СПб.: Изд-во «Профессия», 2001.

4. Задачи как средство обучения алгебре и началам анализа в X классе. Уч. пособие// Сост. Е. С. Канин. – Киров, 1985.

5. Задачник по курсу математического анализа. Уч. пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов désинститутов. Ч. I// Под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971.

6. Зельдович, Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. Уч. пособие для физико-математических средних школ и проведения факультативных занятий. – М.: Наука, 1970.

7. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 1998.

8. М. И. Башмаков Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы- М.: Просвещение, 1992.

9. Журнал “Математика в школе” № 6 – 1980 г. Статья “ Применение производной в практической деятельности”, автор В.Е. Львов.

10. Книга для учителя “Прикладные задачи по алгебре”, М: “ Просвещение” – 1999 г., автор Ю.Ф.Фоминых.

11. portfolio.1september.ru

12. http://festival.1september.ru/